Задачи

Муниципального этапа олимпиады по математике

2016/2017 учебного года

7 класс

1. Однажды на лестнице была найдена странная тетрадь. В ней было записано сто утверждений:

   "В этой тетради ровно одно неверное утверждение";

   "В этой тетради ровно два неверных утверждения";

   "В этой тетради ровно три неверных утверждения";

   ...

   "В этой тетради ровно сто неверных утверждений".

   Есть ли среди этих утверждений верные, и если да, то какие?

2. Заполните свободные клетки "шестиугольника" (см. рисунок 1) целыми числами от 1 до 19 так, чтобы во всех вертикальных и диагональных рядах сумма чисел, стоящих в одном ряду, была бы одна и та же.

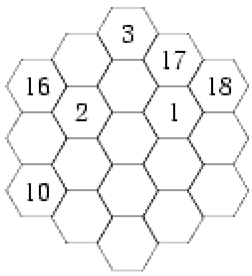

Рис. 1

3. Отличник Иванов купил общую тетрадь объёмом 96 листов и пронумеровал все её страницы по порядку числами от 1 до 192. Двоечник Петров вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. В ответе у Петрова получилось 2016. Не ошибся ли он?

4. У бабушки была клетчатая тряпочка (см. рисунок 2). Однажды она захотела сшить из неё подстилку коту в виде квадрата размером 5×5. Бабушка разрезала тряпочку по линиям сетки на три части и сшила из них квадратный коврик, также раскрашенный в шахматном порядке. Покажите, как она могла это сделать (у тряпочки одна сторона – лицевая,

а другая – изнаночная, то есть части можно поворачивать, но нельзя переворачивать).

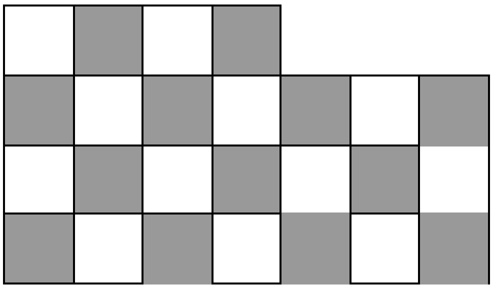

Рис. 2

5. По неподвижному эскалатору человек спускается быстрее, чем поднимается. Что быстрее: спуститься и подняться по поднимающемуся эскалатору или спуститься и подняться по спускающемуся эскалатору? (Предполагается, что все скорости, о которых идет речь, постоянны, причём скорости эскалатора при движении вверх и вниз одинаковы, а скорость человека относительно эскалатора всегда больше скорости эскалатора.)

Задачи

Муниципального этапа олимпиады по математике

2016/2017 учебного года

8 класс

1. В Стране Чудес проводилось следствие по делу об украденном бульоне. На суде Мартовский Заяц заявил, что бульон украл Болванщик. Соня и Болванщик тоже дали показания, но что они сказали, никто не запомнил, а запись смыло алисиными слезами. В ходе судебного заседания выяснилось, что бульон украл лишь один из подсудимых и что только он дал правдивые показания. Так кто украл бульон?
2. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то сумма больше 4.
3. В треугольнике длины двух сторон равны 3,14 и 0,67. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она является целым числом.
4. Из квадратного листа бумаги в клетку, содержащего целое число клеток, вырезали квадрат, содержащий целое число клеток так, что осталось 124 клетки. Сколько клеток мог содержать первоначальный лист бумаги?
5. В последовательности цифр 1234096... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырех цифр. Встретятся ли в этой последовательности подряд четыре цифры 8123?

Решения задач

Муниципального этапа олимпиады по математике

2016/2017 учебного года

7 класс

1. Однажды на лестнице была найдена странная тетрадь. В ней было записано сто утверждений:

   "В этой тетради ровно одно неверное утверждение";

   "В этой тетради ровно два неверных утверждения";

   "В этой тетради ровно три неверных утверждения";

   ...

   "В этой тетради ровно сто неверных утверждений".

   Есть ли среди этих утверждений верные, и если да, то какие?

   Решение. То, что в тетради записано 100 утверждений, каждые два из которых противоречат друг другу, означает, что если среди них и есть верные утверждения, то их не может быть более одного. Посмотрим, может ли здесь быть хотя бы одно верное утверждение. Если верно ровно одно утверждение, то ровно девяносто девять неверных. А такое утверждение в тетради есть: "В этой тетради ровно девяносто девять неверных утверждений". Итак, в тетради записано ровно одно верное утверждение.

   Ответ. Одно верное утверждение: "В этой тетради ровно девяносто девять неверных утверждений".

   Замечание: Если участник показал, что верных утверждений – не более одного – 3 балла.

2. Заполните свободные клетки "шестиугольника" (см. рисунок 1) целыми числами от 1 до 19 так, чтобы во всех вертикальных и диагональных рядах сумма чисел, стоящих в одном ряду, была бы одна и та же.

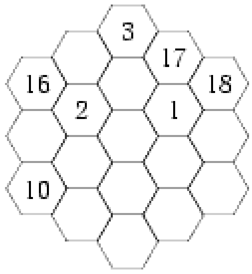

Рис. 1

Решение. Поскольку один из рядов таблицы заполнен, то можно определить сумму ряда – она равна 38. Теперь можно расставить числа во многих клетках (см. рисунок 1′).

Рис. 1′

Осталось 7 пустых клеток, в которых должны быть расположены числа 4, 5, 6, 8, 13, 14, 15. Рассмотрим диагональ, на которой расположены числа 10, 1, 18. Две пустые клетки на ней должны занимать два числа с суммой 9. Это могут быть только 4 и 5. Теперь рассмотрим ту диагональ, на которой расположены числа 16, 2, 9. Две пустые клетки на ней должны занимать два числа с суммой 11. Это могут быть только 5 и 6. Значит, в центре стоит 5, а вторые числа на диагоналях – соответственно 4 и 6. Теперь уже можно однозначно заполнить всю таблицу (рисунок 1′′).

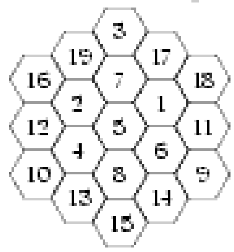

Рис. 1′′

Ответ. См. рисунок 1″.

Замечание: Если правильно (и с обоснованием) расставлены все числа, попавшие на рисунок 1′ – 3 балла.

3. Отличник Иванов купил общую тетрадь объёмом 96 листов и пронумеровал все её страницы по порядку числами от 1 до 192. Двоечник Петров вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. В ответе у Петрова получилось 2016. Не ошибся ли он?

   Решение. Сумма номеров на одном листе нечётна, поскольку это сумма двух последовательных чисел. Всего листов 25. Сумма 25 нечётных чисел должна быть нечётной, а у Петрова получилось чётное число. Значит, Петров ошибся в своих вычислениях.

   Ответ: Петров ошибся.

   Замечание: Если показано, что сумма номеров на одном листе нечетна – 3 балла.

4. У бабушки была клетчатая тряпочка (см. рисунок 2). Однажды она захотела сшить из неё подстилку коту в виде квадрата размером 5×5. Бабушка разрезала тряпочку по линиям сетки на три части и сшила из них квадратный коврик, также раскрашенный в шахматном порядке. Покажите, как она могла это сделать (у тряпочки одна сторона – лицевая, а другая – изнаночная, то есть части можно поворачивать, но нельзя переворачивать).

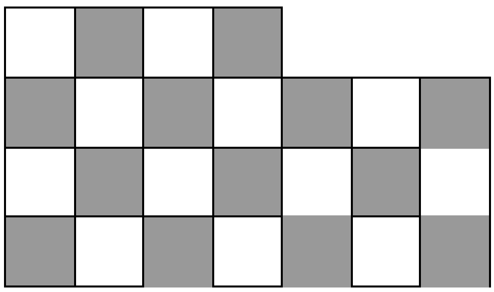

Рис. 2

Решение. Это можно сделать несколькими способами – см. рисунок 2′.

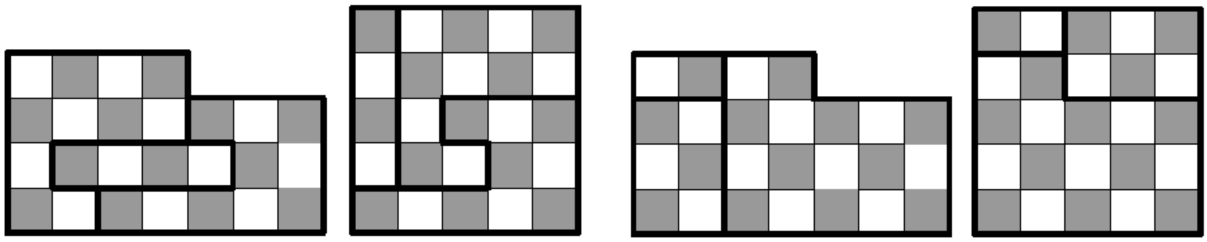

Рис. 2′

Замечание: Любое решение, не удовлетворяющее требованию «шахматности» раскраски итогового коврика, оценивается в 0 баллов.

5. По неподвижному эскалатору человек спускается быстрее, чем поднимается. Что быстрее: спуститься и подняться по поднимающемуся эскалатору или спуститься и подняться по спускающемуся эскалатору? (Предполагается, что все скорости, о которых идет речь, постоянны, причём скорости эскалатора при движении вверх и вниз одинаковы, а скорость человека относительно эскалатора всегда больше скорости эскалатора.)

Решение. Обозначим скорость эскалатора через v, скорости человека, поднимающегося и спускающегося по эскалатору, через v_1 и v_2 соответственно (тогда по условию $v<v_1<v_2$). Длину эскалатора обозначим через l. Тогда время движения по поднимающемуся эскалатору равно $t_1=\frac{l}{v_1+v}+\frac{l}{v_2-v}$, а по спускающемуся эскалатору – $t_2=\frac{l}{v_2+v}+\frac{l}{v_1-v}$

Вычислим их разность:

$$t_1-t_2=\frac{l}{v_1+v}+\frac{l}{v_2-v}-\frac{l}{v_2+v}-\frac{l}{v_1-v}=-2lv\left(\frac{1}{v_1^2-v^2}-\frac{1}{v_2^2-v^2}\right)$$

По условию, знаменатели обеих дробей положительны, причём первый меньше второго, поэтому выражение в скобках положительно, а вся разность отрицательна. Вывод: $t_1<t_2$.

Ответ: По поднимающемуся эскалатору быстрее.

Замечание: Если правильно найдена разность времени движения по поднимающемуся и опускающемуся эскалаторам, но не оценена (оценена неверно) – 2 балла.