Решения задач

Регионального этапа олимпиады по математике

2016/2017 учебного года

7 класс

1. Десять человек захотели основать клуб. Для этого им необходимо собрать определённую сумму вступительных взносов. Если бы организаторов было на пять человек больше, то каждый из них должен был бы внести на 100 рублей меньше. Сколько денег внёс каждый?

   Решение. Обозначим величину вступительного взноса через x. Тогда можно составить уравнение $10x=15(x-100)$, решив которое, определим $x=300$ рублей. Можно было бы решить эту задачу, не составляя уравнения, рассуждая следующим образом: те 100 рублей, которые сэкономят 10 первоначальных членов клуба, заплатят 5 новых членов, т.е. каждый из 5ти заплатит по 200 рублей. Таким образом, при 15-ти членах клуба общий взнос составит 200×15=3000 рублей. Значит, для 10-ти участников членский взнос был равен 3000:10=300 рублей.

   Ответ. 300 рублей.

   Замечание: Если уравнение правильно составлено, но решено с ошибкой либо не решено – 3 балла. Если правильным рассуждением установлено, что новый членский взнос составляет 200 рублей, но решение не закончено – 4 балла.

2. а) В конструкции на рисунке 1 переложите две спички так, чтобы получилось пять равных квадратов.

   б) Из новой фигуры уберите 3 спички так, чтобы осталось только 3 квадрата.

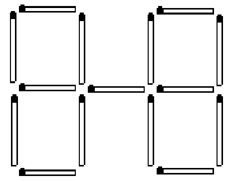

Рис. 1

Решение. Так как фигура симметричная, решение не единственно. Возможный вариант решения представлен на рисунках 1′ и 1″.

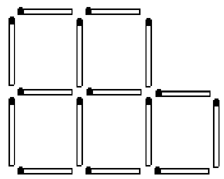

Рис. 1′

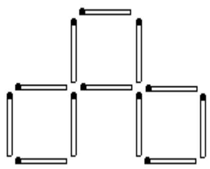

Рис. 1″

Замечание: Если решен только п. а) – 3 балла (за любое правильное решение).

3. Известно, что выражение $14x+13y$ делится на 11 при некоторых целых x и y. Докажите, что $19x+9y$ также делится на 11 при таких x и y.

Решение. Преобразуем данное выражение: $19x+9y=11\cdot(3x+2y)-(14x+13y)$. Теперь видно, что оно делится на 11 как разность двух выражений, каждое из которых делится на 11.

Замечание: За любой рассмотренный частный случай значений x и y – 0 баллов. Если участник показал, что при данных условиях выражение $3x+2y$ или любое кратное ему делится на 11 – 2 балла.

4. Существует ли набор чисел, сумма которых равна 1, а сумма их квадратов меньше $\frac{1}{2016}$?

Решение. Условию задачи удовлетворяет, например, набор из 2017 чисел, равных $\frac{1}{2017}$. Сумма их квадратов равна $\frac{1}{2017}<\frac{1}{2016}$.

Ответ: Существует.

Замечание: За ответ «да» или «нет» без обоснования – 0 баллов. Если участник догадался рассматривать наборы из одинаковых чисел, рассмотрел более одного такого варианта, но не дошел до правильного решения – 3 балла.

5. В Монголии имеются в обращении монеты в 3 и 5 тугриков. Входной билет в центральный парк стоит 4 тугрика. Как-то раз перед открытием в кассу парка выстроилась очередь из 200 посетителей. У каждого из них, а также у кассира есть ровно 22 тугрика. Докажите, что все посетители смогут купить билет в порядке очереди.

   Решение. Набрать 22 тугрика монетами по 3 и 5 тугриков можно единственным способом: две монеты по 5 тугриков и четыре монеты по 3 тугрика. Укажем, как должен действовать кассир. У первого посетителя он просит три монеты по 3 тугрика и дает ему сдачу монетой в 5 тугриков. У второго посетителя кассир просит две монеты по 5 тугриков и дает ему сдачу двумя монетами по 3 тугрика. После этого у кассира монет каждого типа стало на одну больше. Продолжая действовать таким же образом, он сможет обслужить любое количество посетителей.

   Замечание: Если участник показал, что 22 тугрика монетами по 3 и 5 тугриков можно набрать единственным способом – 2 балла; если догадался до двух предложенных вариантов расчета – еще 2 балла; если показал, что при их чередовании количество монет каждого типа у кассира возрастает – еще 3 балла.