Решения задач

Регионального этапа олимпиады по математике

2016/2017 учебного года

8 класс

1. В парке росли липы и клены. Кленов среди них было 60%. Весной в парке посадили липы, после чего кленов стало 20%. А осенью посадили клены, и кленов стало снова 60%. Во сколько раз увеличилось количество деревьев в парке за год?

   Решение. Сначала лип было в 1,5 раза меньше, чем клёнов, а летом стало в 4 раза больше. При этом количество клёнов не изменилось. Значит, лип стало в $1{,}5 \cdot 4 = 6$ раз больше.

   К концу года отношение числа лип к количеству всех деревьев стало таким же, как было в начале. Но осенью количество лип не менялось, значит, количество всех деревьев (по сравнению с исходным) увеличилось в 6 раз.

   Ответ: В 6 раз.

   Замечание. Если доказано, что летом лип стало в 6 раз больше, чем в начале года – 3 балла.

2. Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

   Решение. У каждого человека из компании имеется от 0 до 4 знакомых в этой компании. Таким образом, количество знакомых может принимать 5 различных значений: 0, 1, 2, 3, 4. Поэтому если бы 5 человек имели различное число знакомых, то в компании присутствовало бы по одному человеку, имеющему 0, 1, 2, 3, 4 знакомых. С другой стороны, если есть человек, имеющий 4 знакомых, то он знаком со всеми, следовательно, нет человека, который имеет 0 знакомых. Получили противоречие, значит наше предположение неверно, и в компании есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

Замечание. Если показано, что количество знакомых может принимать 5 различных значений – 3 балла.

3. Толя выложил в ряд 101 монету достоинством 1, 2 и 3 копейки. Оказалось, что между каждыми двумя копеечными монетами лежит хотя бы одна монета, между каждыми двумя двухкопеечными монетами лежат хотя бы две монеты, а между каждыми двумя трёхкопеечными монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько трёхкопеечных монет могло быть у Толи?

   Решение. Рассмотрим четыре монеты, лежащие подряд. По условию среди них не может быть более одной трёхкопеечной монеты, более двух двухкопеечных и более двух копеечных монет.

   Если при этом в четвёрке есть две двухкопеечные монеты, то между ними лежат две монеты, одна из которых трёхкопеечная: копеечные монеты лежать рядом не могут. Если же в четверке только одна двухкопеечная монета, то в ней есть еще две копеечные и одна трехкопеечная. Таким образом, среди любых четырёх монет, лежащих подряд, есть ровно одна трёхкопеечная монета.

   Так как $101=4\cdot 25+1$, то трёхкопеечных монет – либо 25, либо 26.

   Примеры: для 25 монет: 1, 3, 1, 2, 1, 3, 1, 2, ..., 1, 3, 1, 2, 1;

   для 26 монет: 3, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, ..., 3, 1, 2, 1, 3.

   Замечание. Если доказано, что среди любых четырёх монет, лежащих подряд, есть ровно одна трёхкопеечная монета – 4 балла; если приведен пример только для 25 или только для 26 монет – за него начисляется 1 балл.

4. Может ли сумма $1+2+3+...+(n-1)+n$ при каком-нибудь натуральном n оканчиваться цифрой 7?

   Решение. Вычислим сумму $S=1+2+3+...+(n-1)+n=n(n+1)/2$. Чтобы число S оканчивалось на цифру 7, нужно, чтобы число $S-7=n(n+1)/2-7=(n(n+1)-14)/2$ делилось на 10, следовательно, число $n(n+1)-14$ должно делиться, во всяком случае, на 5. Таким образом,

$n(n+1)$ должно давать остаток 4 от деления на 5. Однако, если n дает остаток 0 или 4 от деления на 5, то $n(n+1)$ дает остаток 0 от деления на 5; если n дает остаток 1 или 3 от деления на 5, то $n(n+1)$ дает остаток 2 от деления на 5; если n дает остаток 2 от деления на 5, то $n(n+1)$ дает остаток 1 от деления на 5. Таким образом, ни при каком натуральном n число S не может оканчиваться на 7.

Ответ: Не может.

Замечание: За любое количество рассмотренных частных случаев n – 0 баллов. Если задача сведена к рассмотрению остатков от деления на 5 выражения $n(n+1)$ – 2 балла. За правильное рассмотрение каждого из 5 возможных случаев остатка от деления n на 5 начисляем по 1 баллу.

5. Две равных окружности касаются изнутри третьей и касаются между собой. Соединив три центра, получим треугольник с периметром, равным 18. Найдите радиус большей окружности.

Решение. Линия центров двух касающихся окружностей проходит через их точку касания. Пусть радиусы данных окружностей равны r, r и R ($r<R$). Тогда стороны указанного треугольника равны R-r, R-r и $2r$ (см. рисунок 1). Поэтому $R-r+R-r+2r=2R=18$.

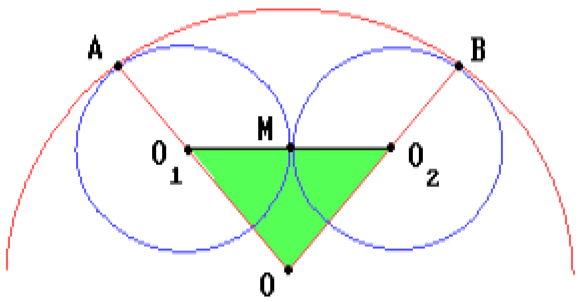

Рис. 1

Отсюда R=9.

Ответ: 9.

Замечание: Если длины сторон треугольника выражены через радиусы окружностей – 3 балла.

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ.

Для повышения качества проверки возможна организация централизованной проверки региональным жюри. Такая организация проверки рекомендуется для регионов с невысокой плотностью населения.

Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого жюри муниципального этапа обязано помнить о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому **не следует** в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Критерии оценивания задач

Регионального этапа олимпиады по математике

2016/2017 учебного года

<u>7 класс</u>

1. Десять человек захотели основать клуб. Для этого им необходимо собрать определённую сумму вступительных взносов. Если бы организаторов было на пять человек больше, то каждый из них должен был бы внести на 100 рублей меньше. Сколько денег внёс каждый?

   Критерии: Если уравнение правильно составлено, но решено с ошибкой либо не решено – 3 балла. Если правильным рассуждением установлено, что новый членский взнос составляет 200 рублей, но решение не закончено – 4 балла.

2. а) В конструкции на рисунке 1 переложите две спички так, чтобы получилось пять равных квадратов.

   б) Из новой фигуры уберите 3 спички так, чтобы осталось только 3 квадрата.

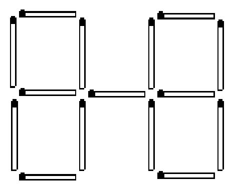

Рис. 1

   Критерии: Если решен только п. а) – 3 балла (за любое правильное решение).

3. Известно, что выражение $14x+13y$ делится на 11 при некоторых целых x и y. Докажите, что $19x+9y$ также делится на 11 при таких x и y.

   Критерии: За любой рассмотренный частный случай значений x и y – 0 баллов. Если участник показал, что при данных условиях выражение $3x+2y$ или любое кратное ему делится на 11 – 2 балла.

4. Существует ли набор чисел, сумма которых равна 1, а сумма их квадратов меньше $\frac{1}{2016}$?

Критерии: За ответ «да» или «нет» без обоснования – 0 баллов. Если участник догадался рассматривать наборы из одинаковых чисел, рассмотрел более одного такого варианта, но не дошел до правильного решения – 3 балла.

5. В Монголии имеются в обращении монеты в 3 и 5 тугриков. Входной билет в центральный парк стоит 4 тугрика. Как-то раз перед открытием в кассу парка выстроилась очередь из 200 посетителей. У каждого из них, а также у кассира есть ровно 22 тугрика. Докажите, что все посетители смогут купить билет в порядке очереди.

   Критерии: Если участник показал, что 22 тугрика монетами по 3 и 5 тугриков можно набрать единственным способом – 2 балла; если догадался до двух предложенных вариантов расчета – еще 2 балла; если показал, что при их чередовании количество монет каждого типа у кассира возрастает – еще 3 балла.

Критерии оценивания задач

Регионального этапа олимпиады по математике

2016/2017 учебного года

8 класс

1. В парке росли липы и клены. Кленов среди них было 60%. Весной в парке посадили липы, после чего кленов стало 20%. А осенью посадили клены, и кленов стало снова 60%. Во сколько раз увеличилось количество деревьев в парке за год?

   Критерии: Если доказано, что летом лип стало в 6 раз больше, чем в начале года – 3 балла.

2. Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

   Критерии: Если показано, что количество знакомых может принимать 5 различных значений – 3 балла.

3. Толя выложил в ряд 101 монету достоинством 1, 2 и 3 копейки. Оказалось, что между каждыми двумя копеечными монетами лежит хотя бы одна монета, между каждыми двумя двухкопеечными монетами лежат хотя бы две монеты, а между каждыми двумя трёхкопеечными монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько трёхкопеечных монет могло быть у Толи?

   Критерии: Если доказано, что среди любых четырёх монет, лежащих подряд, есть ровно одна трёхкопеечная монета – 4 балла; если приведен пример только для 25 или только для 26 монет – за него начисляется 1 балл.

4. Может ли сумма $1+2+3+...+(n-1)+n$ при каком-нибудь натуральном n оканчиваться цифрой 7?

   Критерии: За любое количество рассмотренных частных случаев n – 0 баллов. Если задача сведена к рассмотрению остатков от деления на 5 выражения $n(n+1)$ – 2 балла. За правильное рассмотрение каждого из 5 возможных случаев остатка от деления n на 5 начисляем по 1 баллу.

5. Две равных окружности касаются изнутри третьей и касаются между собой. Соединив три центра, получим треугольник с периметром, равным 18. Найдите радиус большей окружности.

   Критерии: Если длины сторон треугольника выражены через радиусы окружностей – 3 балла.