Решения задач

Муниципального этапа олимпиады по математике

2016/2017 учебного года

8 класс

1. В Стране Чудес проводилось следствие по делу об украденном бульоне. На суде Мартовский Заяц заявил, что бульон украл Болванщик. Соня и Болванщик тоже дали показания, но что они сказали, никто не запомнил, а запись смыло алисиными слезами. В ходе судебного заседания выяснилось, что бульон украл лишь один из подсудимых и что только он дал правдивые показания. Так кто украл бульон?

   Решение. Вором не может быть Мартовский Заяц, потому что вор сказал правду, а Заяц, в этом случае, соврал. Вором не может быть и Болванщик, потому что, в этом случае, Заяц сказал правду, а правду сказал только вор. Значит, вор – Соня.

   Ответ. Соня.

   Замечание. Если верно показано, что вором не может быть Мартовский Заяц, либо, что вором не может быть Болванщик – 3 балла.

2. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то сумма больше 4.

   Решение. Пусть $x, y>0$ и $xy>x+y$.

   Имеем: $(x+y)^2\geq 4xy>4(x+y)$. Поделив обе части неравенства на положительное число $x+y$, получим $x+y>4$.

   Замечание. За рассмотренный частный случай при отсутствии общего доказательства – 0 баллов.

3. В треугольнике длины двух сторон равны 3,14 и 0,67. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она является целым числом.

   Решение. Пусть длина третьей стороны равна n. По неравенству треугольника $3{,}14-0{,}67<n<3{,}14+0{,}67$. Так как n – целое число, то $n=3$.

   Ответ. 3.

Замечание. Если участник, применив неравенство треугольника, получил верную оценку для n только с одной стороны – 3 балла.

4. Из квадратного листа бумаги в клетку, содержащего целое число клеток, вырезали квадрат, содержащий целое число клеток так, что осталось 124 клетки. Сколько клеток мог содержать первоначальный лист бумаги?

   Решение. Задача сводится к решению в натуральных числах уравнения x^2-y^2=124, которое можно переписать в виде (x-y)(x+y)=124. Хотя бы один из множителей левой части чётен, поэтому x и y имеют одинаковую четность, значит, оба числа x-y и x+y чётны. Единственный способ разложить число 124 на два чётных сомножителя – это 2·62. Значит сумма чисел x и y равна 62, а разность – 2, откуда x=32, y=30.

   Ответ: 32^2=1024 клетки.

   Замечание: Верный ответ, полученный перебором некоторого количества вариантов, оценивается в 1 балл. Если составлено нужное уравнение и разность квадратов разложена на множители – 2 балла. Если показано, что x и y имеют одинаковую четность – 3 балла; если показано, что числа x-y и x+y чётны – 5 баллов.

5. В последовательности цифр 1234096... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырех цифр. Встретятся ли в этой последовательности подряд четыре цифры 8123?

   Решение. Заметим, что по правилу построения последовательности, цифра, предшествующая четверке цифр, определяется этой четверкой однозначно. Если в последовательности встретится еще раз (не в начале последовательности) четверка 1234, то цифра, предшествующая этой четверке, как легко убедиться, должна равняться 8, и таким образом в последовательности встретится четверка 8123. Осталось доказать, что четверка 1234 встретится в последовательности еще хотя бы один раз. Поскольку четверок цифр конечное число, в последовательности встретятся две одинаковые четверки цифр в разных местах. Тогда цифры, предшествующие этим четверкам, тоже одинаковы. Поэтому четверки, полученные из первоначальных сдвигом на одну цифру влево, тоже одинаковы. Рассуждая так и далее, мы придем к двум одинаковым четверкам, одна из которых расположена в начале последовательности (т.е. эта четверка – 1234).

Ответ: Да.

Замечание: Если показано, что следующая после четверки 8123 цифра – это 4 – 1 балл; если доказано, что перед четверкой 1234 должна стоять цифра 8 – 2 балла. За доказательство того факта, что в последовательности будут повторяющиеся четверки, начисляется 3 балла.

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ.

Для повышения качества проверки возможна организация централизованной проверки региональным жюри. Такая организация проверки рекомендуется для регионов с невысокой плотностью населения.

Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого жюри муниципального этапа обязано помнить о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому **не следует** в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Критерии оценивания задач

Муниципального этапа олимпиады по математике

2016/2017 учебного года

7 класс

1. Однажды на лестнице была найдена странная тетрадь. В ней было записано сто утверждений:

   "В этой тетради ровно одно неверное утверждение";

   "В этой тетради ровно два неверных утверждения";

   "В этой тетради ровно три неверных утверждения";

   ...

   "В этой тетради ровно сто неверных утверждений".

   Есть ли среди этих утверждений верные, и если да, то какие?

   Критерии: Если участник показал, что верных утверждений – не более одного – 3 балла.

2. Заполните свободные клетки "шестиугольника" (см. рисунок 1) целыми числами от 1 до 19 так, чтобы во всех вертикальных и диагональных рядах сумма чисел, стоящих в одном ряду, была бы одна и та же.

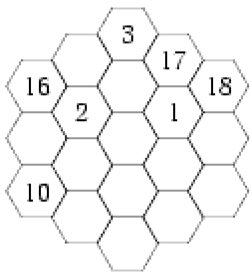

Рис. 1

   Критерии: Если правильно (и с обоснованием) расставлены все числа, попавшие на рисунок 1′ – 3 балла.

3. Отличник Иванов купил общую тетрадь объёмом 96 листов и пронумеровал все её страницы по порядку числами от 1 до 192. Двоечник Петров вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. В ответе у Петрова получилось 2016. Не ошибся ли он?

Критерии: Если показано, что сумма номеров на одном листе нечетна – 3 балла.

4. У бабушки была клетчатая тряпочка (см. рисунок 2). Однажды она захотела сшить из неё подстилку коту в виде квадрата размером 5×5. Бабушка разрезала тряпочку по линиям сетки на три части и сшила из них квадратный коврик, также раскрашенный в шахматном порядке. Покажите, как она могла это сделать (у тряпочки одна сторона – лицевая, а другая – изнаночная, то есть части можно поворачивать, но нельзя переворачивать).

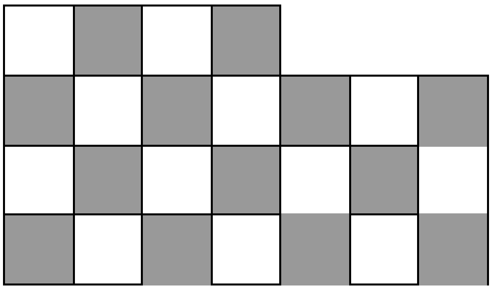

Рис. 2

Критерии: Любое решение, не удовлетворяющее требованию «шахматности» раскраски итогового коврика, оценивается в 0 баллов.

5. По неподвижному эскалатору человек спускается быстрее, чем поднимается. Что быстрее: спуститься и подняться по поднимающемуся эскалатору или спуститься и подняться по спускающемуся эскалатору? (Предполагается, что все скорости, о которых идет речь, постоянны, причём скорости эскалатора при движении вверх и вниз одинаковы, а скорость человека относительно эскалатора всегда больше скорости эскалатора.)

Критерии: Если правильно найдена разность времени движения по поднимающемуся и опускающемуся эскалаторам, но не оценена (оценена неверно) – 2 балла.

Критерии оценивания задач

Муниципального этапа олимпиады по математике

2016/2017 учебного года

8 класс

1. В Стране Чудес проводилось следствие по делу об украденном бульоне. На суде Мартовский Заяц заявил, что бульон украл Болванщик. Соня и Болванщик тоже дали показания, но что они сказали, никто не запомнил, а запись смыло алисиными слезами. В ходе судебного заседания выяснилось, что бульон украл лишь один из подсудимых и что только он дал правдивые показания. Так кто украл бульон?

   Критерии: Если верно показано, что вором не может быть Мартовский Заяц, либо, что вором не может быть Болванщик – 3 балла.

2. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то сумма больше 4.

   Критерии. За рассмотренный частный случай при отсутствии общего доказательства – 0 баллов.

3. В треугольнике длины двух сторон равны 3,14 и 0,67. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она является целым числом.

   Критерии: Если участник, применив неравенство треугольника, получил верную оценку для n только с одной стороны – 3 балла.

4. Из квадратного листа бумаги в клетку, содержащего целое число клеток, вырезали квадрат, содержащий целое число клеток так, что осталось 124 клетки. Сколько клеток мог содержать первоначальный лист бумаги?

   Критерии: Верный ответ, полученный перебором некоторого количества вариантов, оценивается в 1 балл. Если составлено нужное уравнение и разность квадратов разложена на множители – 2 балла. Если показано, что x и y имеют одинаковую четность – 3 балла; если показано, что числа x-y и x+y чётны – 5 баллов.

5. В последовательности цифр 1234096... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырех цифр. Встретятся ли в этой последовательности подряд четыре цифры 8123?

Критерии: Если показано, что следующая после четверки 8123 цифра – это 4 – 1 балл; если доказано, что перед четверкой 1234 должна стоять цифра 8 – 2 балла. За доказательство того факта, что в последовательности будут повторяющиеся четверки, начисляется 3 балла.